

ストークス流体中の結合回転子の遊泳ダイナミクスと効率

理学専攻・情報科学コース
重富麻美

1 はじめに：鞭毛の同期現象

単細胞緑藻クラミドモナスは2本の鞭毛を持ち、鞭毛の打つ(有効打)リズムと元の位置に戻る(回復打)リズムをそろえる(同期)ことによって大きな推進力を生み出すと考えられている。鞭毛を打つリズムが同期する現象を解析するために、線状の鞭毛を、鞭毛の先端のみに球がある形状にモデル化し、ストークス流体中で球が動く軌道とスピードを有効打と回復打の打ち方とするモデルで数値計算が行われてきた [1]。

本研究では、クラミドモナスの遊泳モデルとして、クラミドモナスとその鞭毛を3つの球で表し [2, 3]、2本の鞭毛が完全に同期した単体および複数のスイマーの遊泳について数値計算を行い、遊泳効率について調べた。

2 方法および条件

2.1 3球のスイマーのモデル

先行研究 [2, 3] の手法に従い、クラミドモナスの体を1つの球、鞭毛を2つの球とした3球のスイマーで表現する(図 2.1)。まず、半径 r の円軌道上を回転する球を回転子と呼ぶ。半径 a の2個の回転子の軌道間を剛体の軸でつなぎ、さらにその軸の中心から、垂直に H 離れた位置に体を表す半径 b の球をつなぐ。

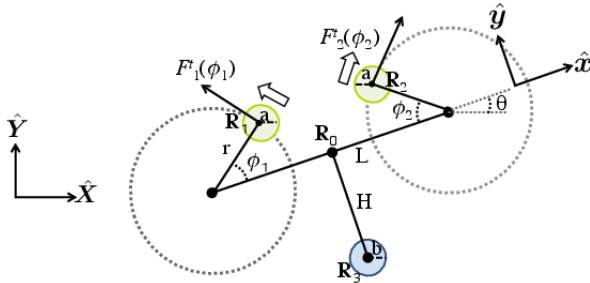


図 1: スイマーのモデルの概略。

2個の回転子の軌道をつなぎ軸の中央の位置ベクトルを \mathbf{R}_0 、それぞれの球の位置ベクトルを $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ とする。絶対座標 \hat{X}, \hat{Y} に対する軸の傾きを θ 、軸に平行な方向の単位ベクトルを \hat{x}, \hat{y} とする。回転子1は位相は軸から反時計回りに ϕ_1 、回転子2のもつ位相は軸から時計回りに ϕ_2 の位相を持つ。2つの回転子の軌道の接線方向の単位ベクトル、法線方向の単位ベクトルをそれぞれ \hat{t}_i, \hat{n}_i とすると、スイマーの傾きと位相を考慮した形状は以下のように表される。

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 - L\hat{x} + r\hat{n}_1, \quad (1a)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_0 + L\hat{x} + r\hat{n}_2, \quad (1b)$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_0 - H\hat{y}. \quad (1c)$$

この式を時間 t で微分すると、各粒子の速度の式が得

られる。

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \dot{\mathbf{R}}_0 + L\dot{\theta}\hat{y} + r(\dot{\phi}_1 - \dot{\theta})\hat{t}_1, \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \dot{\mathbf{R}}_0 - L\dot{\theta}\hat{y} + r(\dot{\phi}_2 + \dot{\theta})\hat{t}_2, \quad (2b)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_3 = \dot{\mathbf{R}}_0 - H\dot{\theta}\hat{x}. \quad (2c)$$

また、各球が動くとき、周囲の流体に粘性抵抗に相当する力を与え、これによって球周囲に流れが生じる。この流れを介して、球同士に相互作用が働く。流体の粘性率を μ とすると、球 i が球 j に与える相互作用の強さを表すオセーテンソルは球 i, j の座標 (x, y) と距離間距離 l_{ij} によって

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{ij}} + \frac{(x_i - x_j)^2}{l_{ij}^3} & \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{l_{ij}^3} \\ \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{l_{ij}^3} & \frac{1}{l_{ij}} + \frac{(y_i - y_j)^2}{l_{ij}^3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

と表され、粒子間距離が小さいほど相互作用は大きくなる。位置 \mathbf{R}_j に、力 \mathbf{F}_i を持つ球 i がつくる流れ場 $\mathbf{v}(\mathbf{R}_i)$ はオセーテンソルを用いて、 $\mathbf{v}(\mathbf{R}_i) = \mathbf{G}_{ij}\mathbf{F}_j$ となる。このとき、各球の速度は、抵抗係数 ζ を用いて次のように表される。

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{F}_1/\zeta + \mathbf{G}_{12}\mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_{13}\mathbf{F}_3, \quad (4a)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{F}_2/\zeta + \mathbf{G}_{21}\mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_{23}\mathbf{F}_3, \quad (4b)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_3 = \mathbf{F}_3/\zeta + \mathbf{G}_{31}\mathbf{F}_1 + \mathbf{G}_{32}\mathbf{F}_2. \quad (4c)$$

各粒子にかかる力は、回転子の軌道の接線方向にかかる駆動力と、軌道の半径を r に保つために軌道の法線方向にかかる拘束力から $\mathbf{F}_i = F_i^t\hat{t}_i + F_i^n\hat{n}_i$ ($i = 1, 2$) と表すことができる。また、系に外力がかからない時は、合力とトルクが0となる条件、すなわち、

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$T_{1,z} + T_{2,z} + T_{3,z} = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。以上の式を解くことにより、スイマーの運動を計算する。

2.2 パラメータと駆動力

数値計算に際しては、無次元化した方程式を用い、無次元化のための代表長さをクラミドモナスの体長 $\sim 10^{-3}$ [cm]、代表速度をクラミドモナスの大きさの球の自由落下の終端速度 $\sim 10^{-2}$ [cm/s]、レイノルズ数を $\text{Re} = 2.287 \times 10^{-3}$ とした。スイマーの形状は、代表長さに対し、 $L = 10, H = L, r = L/2$ とした。駆動力は先行研究 [3] に従い、 2π 周期関数

$$F_i^t(\phi_i) = F_0(1 + B \cos(\phi_i)), \quad (-1 < B < 1) \quad (7)$$

を用いる。駆動力を常に正にするため、 B の範囲が設定されている。駆動力の強さは $F_0 = \mu L^3$ を用いる。この駆動力では B が正のとき、回転子が内側を通過するときにより強い駆動力が働く。

3 結果

3.1 回転が同期した単体のスイマーの遊泳

回転が同期した単体のスイマーの遊泳の結果を図2に示す. この場合, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, $F_1^t = F_2^t = F^t$, $F_1^n = F_2^n = F^n$ となり, また, スイマーは軸と垂直方向にしか進まず, スイマーが傾くことはないため, $\dot{\theta} = 0, \theta = 0$ である. この仮定のもとで, 体の球の半径 b を変化させた場合と, 体の球までの距離 H を変化させた場合にスイマーの長時間平均の速度 $\langle V \rangle$ がどのように変化するかを調べた.

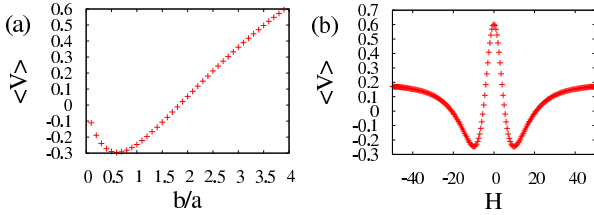


図 2: 平均速度 $\langle V \rangle$ と (a) 体の大きさ b の関係. (b) 体の球までの距離 H の関係.

体の球の大きさや位置によって進行方向と速度が変化する. 体の球が回転子の半径の2倍よりも大きいとき, \hat{y} の正の方向に進む. 横軸の値が十分小さいとき, スイマーが回転子2個だけでできている状態に対応しているが, そのときも速度は0ではない. つまり, 遊泳は体の球がない状態でも可能だと考えられる. また, 体の球の半径が回転子の半径よりも大きいとき, 長時間平均の速度はほぼ b/a に比例して大きくなった. また, $|H| = 1$ 付近でスイマーは \hat{y} の負の方向に進み, それ以外は正の方向に進む. $H = 0$, つまり体の球が回転子をつなぐ軸上にある時, スイマーは最も速度が大きい. これらの結果は先行研究 [2] の結果と非常によく一致していることが確認できた.

3.2 スイマーの遊泳効率

左右の回転子の位相が完全に同期している場合について, 遊泳効率を調べる. 遊泳効率 η は, 回転子を駆動させるのにかった仕事のうちどれだけスイマーの遊泳に使われたかを表す式

$$\eta = \frac{\zeta \langle V \rangle^2}{\langle P \rangle}, \quad P = r\phi_1 F_1^t + r\phi_2 F_2^t \quad (8)$$

を用いる [5].

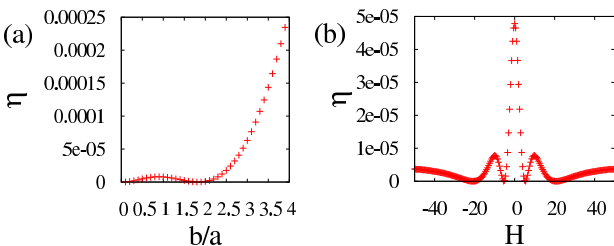


図 3: 駆動力 $F^t = F_0$ のときの遊泳効率の変化. (a) 体の球の半径を変化させたとき. (b) 体の球までの距離を変化させたとき.

図2と同様に, 体の球の半径が大きいとき, また, 体の球が回転子の軌道間を結ぶ軸上にあるときに最も効率が良いという結果になった.

3.3 回転が同期した2つのスイマーの遊泳

左右の回転子がそれぞれ同期しているスイマーの前に, もう1つ同じ大きさのスイマーを置く. この場合も2つのスイマーは鉛直方向にしか泳がず, 軸は傾かない.

また, 2つのスイマー s_1, s_2 が持つ駆動力の係数 B_{s_1}, B_{s_2} が等しいとき, スイマーの位相 ϕ_{s_1}, ϕ_{s_2} が同期する. $H = L$ の2つのスイマーを初期の位相差 0.1π , スイマー間の距離 $2L$ で泳がせた場合, 位相差と軸の中心の y 座標の時間変化は次のようになる.

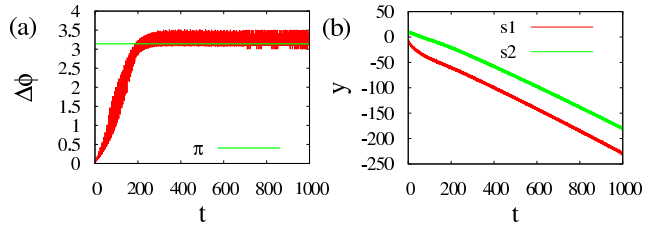


図 4: $B_{s_1} = B_{s_2} = 0.2$ のときの (a) 位相差, (b) 軸の中心の y 座標の時間変化.

2つのスイマーは逆相同期し, スイマー間の距離が離れる. 距離が離れるにつれてスイマー間の相互作用が小さくなり, 1つのスイマーが泳いでいる状態とほぼ等しくなる.

4 まとめ

完全に同相な2個の回転子と体の3球からなるスイマーの数値計算を行った. 体の球の大きさや位置によりスイマーの遊泳の向きと速度が変化し, 体の球が大きいときと体の球が回転子の軸上にあるときに最も平均速度が大きくなった. 縦に2個並べたスイマーでは, 各スイマーの駆動力の係数が等しいとき, 2つのスイマーの位相は, ほぼ逆相で同期した. また, 1個のスイマーの遊泳効率の計算を行った. 速度の計算と同様の結果になった.

参考文献

- [1] Nariya Uchida and Ramin Golestanian, Phys. Rev. L **15**, 058104 (2011).
- [2] Katja Polotzek and Benjamin M. Friedrich, New Journal of Physics **15**, 045005 (2013).
- [3] Rachel R. Bennett and Ramin Golestanian, Phys. Rev. L **110**, 148102 (2013).
- [4] Rachel R. Bennett and Ramin Golestanian, New Journal of Physics **15**, 075028 (2013).
- [5] Daniel Tam and A. E. Hosoi, Phys. Rev. L **98**, 068105 (2007).